

TRANSFORMACIÓN DE CURVATURA EN PROYECCIONES ORTOGONALES: UN ANÁLISIS VISUAL Y GEOMÉTRICO DE CURVAS ESPACIALES

CURVATURE TRANSFORMATION IN ORTHOGONAL PROJECTIONS: A VISUAL AND GEOMETRIC ANALYSIS OF SPATIAL CURVES

Artículo recibido el: 10/16/2025

Artículo aceptado el: 1/16/2026

Dante Yvan Chavil-Montenegro*

*Universidad San Ignacio de Loyola, Facultad de Ingeniería e Inteligencia Artificial, Lima, Perú

Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9621-2881>

dcm358.ual@gmail.com

Oscar Antonio Santamaria Santisteban**

**Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Lambayeque, Perú

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1186-044X>

osantamaria@unprg.edu.pe

The authors declare that there is no conflict of interest

Resumen

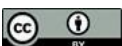
La geometría diferencial clásica nos ofrece herramientas poderosas, como la curvatura y la torsión, para comprender las curvas en el espacio. Sin embargo, visualizar intuitivamente cómo se “retuerce” una curva tridimensional sigue siendo un desafío pedagógico y analítico. Este artículo propone una metodología novedosa para abordar este problema: la construcción de una nueva curva generada a partir de las curvaturas de las proyecciones ortogonales de la curva original. Mediante el uso del programa de cálculo simbólico computacional Maple, analizamos dos casos de estudio: la hélice circular y el nudo tórico. Los resultados revelan que esta transformación actúa como una “huella digital” geométrica, capaz de simplificar la visualización de la torsión (como en el caso de la hélice, donde la transformada resulta ser plana) o de evidenciar la complejidad topológica en curvas anudadas. Esta técnica ofrece una nueva perspectiva para la clasificación y el análisis visual de curvas en el espacio euclidiano tridimensional (\mathbb{R}^3).

Palabras clave: Geometría Diferencial. Proyecciones Ortogonales. Visualización Matemática.

Abstract

Classical differential geometry provides powerful tools, such as curvature and torsion, to understand curves in space. However, intuitively visualizing how a three-dimensional curve "twists" remains a pedagogical and analytical challenge. This article proposes a novel methodology to address this problem: the construction of a new curve generated from the curvatures of the orthogonal projections of the original curve. Using the symbolic computation program Maple, we analyze two case studies: the circular helix and the toric knot. The results reveal that this transformation acts as a geometric "fingerprint," capable of simplifying the visualization of torsion (as in the case of the helix, where the transform turns out to be planar) or highlighting topological complexity in knotted curves. This technique offers a new perspective for the classification and visual analysis of curves in three-dimensional Euclidean space (\mathbb{R}^3).

Keywords: *Differential Geometry. Curvature. Orthogonal Projections. Mathematical Visualization.*



1 INTRODUCCIÓN

En nuestros tiempos de estudiantes e incluso como profesional, cuando nos dedicamos al estudio de las curvas parametrizadas en el espacio, es común sentir que hay un muro entre lo que hacemos con símbolos y lo que realmente imaginamos. A muchos nos cuesta conectar el álgebra con la intuición geométrica. Gracias al Teorema Fundamental de las Curvas, sabemos que la curvatura (κ) y la torsión (τ) definen unívocamente la forma de una curva, salvo su posición en el espacio (Do Carmo, 1976). Bajo la experiencia adquirida, entre la curvatura y la torsión de una curva, la primera es la más fácil de imaginar en tanto la torsión es más esquivada de imaginar para la mente humana.

Desde el avance de los sistemas computacionales, y más aún, con el desarrollo de los sistemas de cálculo computacional, tenemos entornos donde las herramientas de visualización han transformado la forma en que enseñamos y exploramos las matemáticas, naciendo de esta manera la siguiente pregunta ¿podemos crear una representación gráfica que capture la esencia tridimensional de la curva, pero utilizando conceptos más familiares como la curvatura plana? Investigadores como Banchoff y Lovett (2022) sugieren que mirar las proyecciones de objetos multidimensionales es clave para empezar a comprenderlos.

El objetivo de este trabajo no es solo calcular ciertas invariantes, sino también proponer la construcción de una “meta-curva” ($\beta[\alpha]$), cuya construcción nace de tomar una curva parametrizada α en el espacio, para posteriormente iluminarla desde tres direcciones ortogonales (los ejes cartesianos), con el propósito de medir qué tan curvadas son sus sombras para posteriormente usar esos tres valores para graficar una nueva curva, y a partir de ello, explorar qué información nos muestra esta nueva curva sobre la curva original. Exploraremos esta idea con dos curvas: la hélice y el nudo tórico.

2 MARCO TEÓRICO

Para sostener nuestra propuesta, conviene revisar brevemente la forma de comprender hoy la curvatura en la literatura moderna. Trabajaremos con curvas parametrizadas regulares $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde la condición de regularidad ($\alpha'(t) \neq 0$), nos garantiza que su geometría puede analizarse con suavidad (la curva no presenta picos ni

se detiene).

Recordemos que tradicionalmente la curvatura se define a través de la longitud de arco, pero por cuestiones prácticas, y más aún cuando trabajamos en entornos computacionales, resulta más factible trabajar con parametrizaciones arbitrarias. Siguiendo la notación de Hernández Cifre y Pastor Gonzáles (2025), la curvatura de una curva plana proyectada, como por ejemplo en el plano XY, dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\kappa_{xy}(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Esta fórmula tiene una ventaja importante, ya que no solo nos dice cuánto gira la curva, sino también hacia qué lado lo hace. Nuestra propuesta teórica se basa en aplicar esta definición clásica a las tres “sombras” que produce una curva parametrizada en el espacio sobre los planos coordenados.

3 METODOLOGÍA

La metodología que hemos diseñado combina el análisis deductivo con la experimentación computacional. No nos limitamos únicamente a derivar funciones, sino más bien en usar al ordenador como un verdadero laboratorio donde podemos ver, probar y explorar visualmente los resultados.

3.1 Construcción de la transformada $\beta[\alpha](t)$

Para la construcción de la transformada $\beta[\alpha](t)$, partimos de la curva paramétrica original $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde la idea es descomponer su comportamiento espacial observando cómo se proyecta en cada uno de los planos coordenados, obteniendo de esta manera tres curvas planas:

- La proyección sobre el plano XY: $\alpha_{xy} = (x(t), y(t))$
- La proyección sobre el plano XZ: $\alpha_{xz} = (x(t), z(t))$
- La proyección sobre el plano YZ: $\alpha_{yz} = (y(t), z(t))$

Para cada instante t , calculamos la curvatura de estas tres proyecciones usando la fórmula correspondiente (1). Con esos tres valores, formamos la nueva curva en el espacio $\beta[\alpha(t)](t) = (\kappa_{xy}(t), \kappa_{xz}(t), \kappa_{yz}(t))$, donde esta nueva curva recoge como se curva $\alpha(t)$ desde tres perspectivas distintas.

3.2 Herramientas computacionales

Bajo nuestra experiencia, la operatividad en el cálculo manual de la curvatura de una curva se vuelve complejo ya que en estas se debe obtener derivadas de segundo orden, más aún al aplicarlas, por ejemplo, en expresiones racionales, aumenta el nivel de complejidad. Para ahorrarnos todo este trabajo, nos apoyaremos del programa de cálculo simbólico computacional Maple, de modo que dichos cálculos se generen de forma más rápida y, a la vez, nos permitan generar gráficos de alta precisión y asegurar que las singularidades (puntos donde la curvatura podría tender al infinito) se traten correctamente.

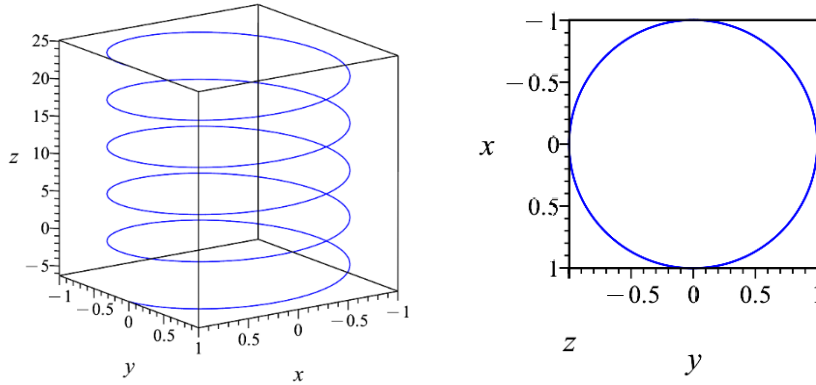
4 RESULTADOS Y DISCUSIONES

Lo interesante de este estudio surge cuando aplicamos la transformación a casos concretos como, por ejemplo, en la hélice circular y en el nudo tórico. Previamente cargaremos en Maple el paquete CyS (curvas y superficies) para la obtención de los cálculos y de las gráficas correspondientes.

Vamos a comenzar con un clásico de la geometría diferencial: la hélice circular, definida por $Hc(t) = (R \cos(t), R \sin(t), ct)$ siendo $R > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Podemos pensar que al tratarse esta de una curva en el espacio que asciende en espiral, la transformada esperada debería de reflejar también esa tridimensionalidad, sin embargo, al aplicar nuestra construcción tendremos un resultado inesperado, pero a la vez elegante.

Figura 1

Izquierda: Gráfica de la hélice circular cuando $R = 1$ y $c = 1$. Derecha: proyección sobre el plano xy .



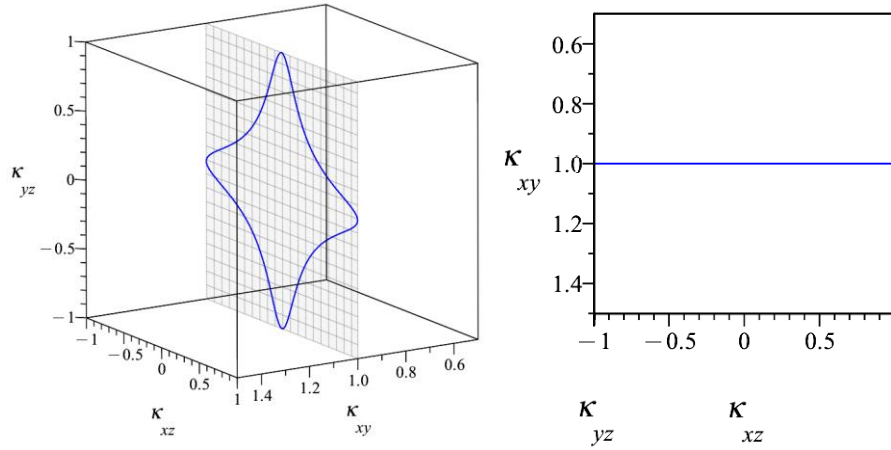
Al aplicar la transformación a la curva $\alpha(t)$ se obtiene la curva:

$$\beta[Hc(t)](t) = \left(\frac{1}{R}, \frac{R \cdot c \cdot \cos(t)}{(R^2 \cdot \sin^2(t) + c^2)^{3/2}}, \frac{R \cdot c \cdot \sin(t)}{(R^2 \cdot \cos^2(t) + c^2)^{3/2}}, \right) \quad (2)$$

Como se puede observar, la componente κ_{xy} es una constante igual a $\frac{1}{R}$, puesto que la proyección de la hélice sobre el plano XY no es más que un círculo perfecto, en tanto, las otras componentes κ_{xz} y κ_{yz} oscilan de manera armónica. Esto provoca que la curva $\beta[Hc(t)](t)$ resulte ser completamente plana, por lo cual, si bien es cierto que la curva hélice circular vive en tres dimensiones, su ‘mapa de curvaturas’ queda vive en una pared 2D plana dentro del espacio de curvatura.

Figura 2

Izquierda: Curva transformada $\beta[\alpha(t)](t)$ (espacio de curvatura) aplicado a $\alpha(t) = Hc(t)$ cuando $R = 1$ y $c = 1$. Derecha: proyección sobre el plano $\kappa_{xy} - \kappa_{xz}$.



Observemos que $\beta[Hc(t)](t)$ es una curva cerrada y acotada, mientras que $Hc(t)$ es una infinita.

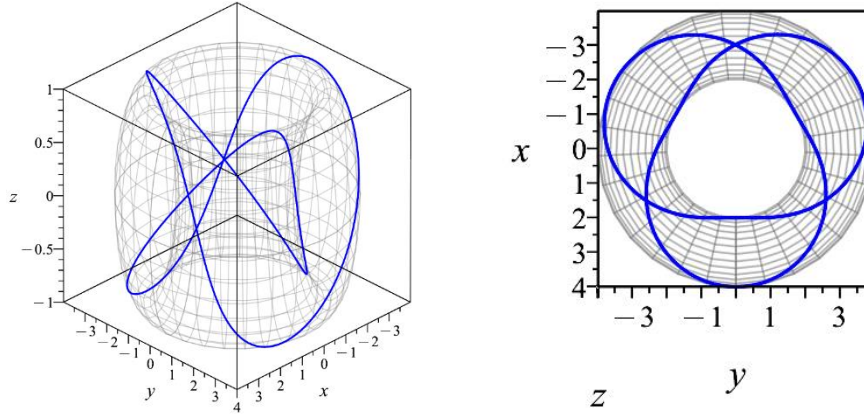
Ahora trabajemos con el Nudo Tórico cuya parametrización esta dada por $T(p, q)(t) = ((R + r \cos(qt)) \cos(pt), (R + r \cos(qt)) \sin(pt), r \sin(qt))$, donde R es el radio mayor del toro (distancia del centro del hueco hasta el centro del tubo), r es el radio menor del toro (radio del tubo), p es el índice longitudinal (número de vueltas que da el nudo alrededor del eje de simetría rotacional (eje Z)), q es el índice meridional (número de vueltas que da el nudo a través del agujero del toro) y t es el parámetro angular que generalmente está comprendido en el intervalo cerrado de 0 a 2π .

Vamos a proceder a graficar la curva para $p = 2$ y $q = 3$, donde los valores de p y q se eligieron cuidadosamente de modo que $mcd(2, 3) = 1$ evitando de esta manera que el nudo se autointersecte. La curva $T(2, 3)(t)$ nos queda como:

$$T(2, 3)(t) = ((R + r \cos(3t)) \cos(2t), (R + r \cos(3t)) \sin(2t), r \sin(3t)) \quad (3)$$

Figura 3

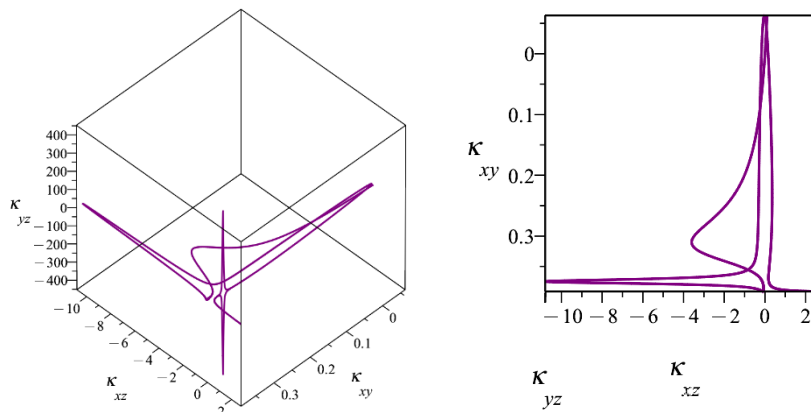
Izquierda: Gráfica del nudo tórico $T(2,3)(t)$ para $R = 3$ y $r = 1$. Derecha: proyección sobre el plano xy .



Como se puede observar en la Figura 3, se puede apreciar un nudo trébol enrollándose sobre la superficie de un toro (enmallado). Nótese que la curva suave y cerrada, recorriendo el toro dos veces longitudinalmente y tres veces meridionalmente. Además, al mirarlo desde arriba (proyección en el plano xy) vemos con claridad la forma de trébol de tres hojas, donde la simetría rotacional de 120° (simetría C_3) es perfecta y se añade a ello que la curva oscila radialmente entre el radio interior ($R - r = 2$) y el radio exterior ($R + r = 4$).

Figura 4

Izquierda: Curva transformada $\beta[\alpha(t)](t)$ (espacio de curvatura) aplicado al nudo tórico $T(2,3)(t)$ con $R = 3$ y $r = 1$. Derecha: proyección sobre el plano $\kappa_{xy} - \kappa_{xz}$.



La Figura 4 es la transformación de la curva $T(2, 3)(t)$, para $R = 3$ y $r = 1$, en el plano de curvaturas. En esta se observa una curva tridimensional cerrada que se diferencia de la hélice circular que era una curva plana, además, al mirarlo desde arriba (proyectada sobre el plano $\kappa_{xy} - \kappa_{xz}$) se nota que la simetría se conserva notándose también tres grandes lóbulos que se extienden desde el centro, confirmando visualmente que la transformación $\beta(t)$ es equivariante bajo rotaciones puesto que si giras el nudo original la firma de curvatura también gira.

A pesar de los resultados prometedores obtenidos en la caracterización visual de la hélice circular y del nudo tórico, existen ciertas limitaciones inherentes a la metodología propuesta, especialmente con miras a futuras investigaciones. En primer lugar, la transformación $\beta[\alpha](t)$ depende estrictamente de la regularidad de la curva parametrizada original $\alpha(t)$, puesto que, en nuestro método se asume que la curva $\alpha(t)$ es de clase C^3 y a la vez regular ($\alpha'(t) \neq 0$) en todo su dominio, ya que cuando la velocidad se anula o aparecen singularidades geométricas (como cúspides o puntos angulosos) las fórmulas de curvatura divergen, lo que puede generar discontinuidades asintóticas en la representación gráfica de la firma. En segundo lugar, la transformación posee una limitación de invariancia de escala, puesto que si bien es cierto que la curva transformada $\beta[\alpha](t)$ permite identificar correctamente la familia de la curva (por ejemplo, todas las hélices circulares generan una firma plana), los valores numéricos de $(\kappa_{xy}, \kappa_{xz}, \kappa_{yz})$ dependen inversamente del tamaño de la curva, lo que implica que para comparar curvas de diferentes dimensiones se requiere un proceso de normalización previo que aún no hemos tratado en este trabajo. Por último, se debe de considerar el costo computacional y la estabilidad numérica del presente método, puesto que en curvas con parametrizaciones complejas o con aquellas que posean datos discretos (nubes de puntos), el cálculo de derivadas de segundo orden puede ampliar el ruido numérico, sobre todo en las regiones donde la curva es casi recta, ya que la curvatura tiende a cero y a la vez pueden generar pequeños errores de precisión que conllevarían a distorsionar de forma significativa la gráfica de $\beta[\alpha](t)$.

5 CONCLUSIÓN

La presente investigación nos permite establecer una nueva metodología de visualización en el campo de la geometría diferencial, basada en transformar una curva

espacial $\alpha(t)$ hacia un espacio definido por las curvaturas de sus proyecciones. A través del análisis comparativo entre la hélice circular $Hc(t)$ y el nudo tórico $T(2,3)(t)$, podemos extraer varias conclusiones fundamentales con respecto a esta nueva metodología:

En primer lugar, la transformación propuesta $\beta[\alpha](t) = (\kappa_{xy}, \kappa_{xz}, \kappa_{yz})$ actúa de manera eficaz como una firma geométrica de la curva original $\alpha(t)$, ya que al igual que una huella dactilar identifica a una persona, la curva $\beta[\alpha](t)$ condensa la información topológica y diferencial de $\alpha(t)$ en una estructura compacta y manejable. Esto se evidencia con claridad en los ejemplos estudiados, ya que en la hélice circular (una curva abierta e infinita) genera una firma cerrada y plana; en tanto, en el nudo tórico se genera una firma espacial compleja que conserva la simetría rotacional C_3 del nudo original.

En segundo lugar, hemos observado que “esta firma de curvatura” permite clasificar de manera inmediata y cualitativa distintas familias de curvas. Cuando $\beta[\alpha](t)$ resulta ser una curva plana basta para identificar curvas cuyas proyecciones tienen curvatura constante, tal como ocurrió con la hélice circular $Hc(t)$; en tanto, el entrelazamiento o la auto-intersección de $\beta[\alpha](t)$ revelan directamente la estructura topológica de nudos y curvas cerradas en el espacio.

Finalmente, la implementación computacional del método mediante el uso del programa Maple nos confirma que la visualización de $\beta[\alpha](t)$ aporta una perspectiva complementaria al marco clásico de Frenet-Serret, puesto que mientras la torsión τ es un escalar local cuya interpretación global suele ser difícil, la geometría de la curva transformada $\beta[\alpha](t)$ ofrece una visualización integrada del comportamiento de $\alpha(t)$, facilitando el reconocimiento de patrones globales como periodicidad, simetrías y estructuras repetitivas, enriqueciendo de esta manera el estudio cualitativo de curvas parametrizadas en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 .

REFERENCIAS

- Banchoff, T. F., & Lovett, S. (2022). *Differential geometry of curves and surfaces* (3.^a ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781003295341>
- Do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall.
- Hernández Cifre, M. A., & Pastor González, J. A. (2025). *Un curso de geometría diferencial: Teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador* (3.^a ed.). Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Mesa Palomino, H., & García Camacho, G. (2025). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Programa Editorial Universidad del Valle. <https://doi.org/10.25100/peu.5072831>

Contribución de los autores

Todos los autores contribuyeron por igual al desarrollo de este artículo.

Disponibilidad de datos

Todos los conjuntos de datos relevantes para los resultados de este estudio están disponibles en su totalidad en el artículo.

Cómo citar este artículo (APA)

Chavil-Montenegro, D. Y., & Santisteban, O. A. S. (2026). TRANSFORMACIÓN DE CURVATURA EN PROYECCIONES ORTOGONALES: UN ANÁLISIS VISUAL Y GEOMÉTRICO DE CURVAS ESPACIALES. *Veredas Do Direito*, 23(4), e234887. <https://doi.org/10.18623/rvd.v23.n4.4887>