

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO MEDIANTE LOS ESPACIOS METRICOS

CHARACTERIZATION OF MATHEMATICAL THINKING THROUGH METRIC SPACES

Artículo recibido el: 9/2/2025

Artículo aceptado el: 12/1/2025

José Gregorio Solorzano-Movilla*

*Escuela Superior de Administración Pública (ESAP), Barranquilla, Colombia

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-4176-0300>

jose.solorzanom@esap.edu.co

Gerardo Antonio Chacón Guerrero**

**Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7325-5245>

gerardoachg@uan.edu.co

Yesika Paola Rojas-Sandoval***

***Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-5865-9313>

yesikarojas@mail.uniatlantico.edu.co

The authors declare that there is no conflict of interest

Resumen

La formación de los profesores de matemáticas en América Latina se ve influida por factores que han llevado a dar prioridad a la didáctica sobre los conocimientos específicos. Un ejemplo de ello es la reducción o eliminación de las asignaturas de matemáticas avanzadas en el plan de estudios de los futuros profesores de matemáticas. Este artículo presenta los resultados de una investigación sobre un programa de formación de profesores de matemáticas, objeto de una reforma curricular en la que los componentes matemáticos pasaron del 30 % al 18 %, eliminando asignaturas como análisis matemático y teoría de grupos, entre otras. El objetivo era distinguir los procesos del pensamiento matemático, utilizando problemas desafiantes relacionados con temas seleccionados de espacios métricos. Para ello, se utilizó una metodología basada en el diseño. Algunos aspectos destacados de las conclusiones son la identificación de las etapas para resolver problemas no rutinarios, la exploración, la formulación de conjeturas, la demostración y el establecimiento de conexiones. Aportando una visión original a este proceso, se denota el valor de la experimentación en el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras clave: Pensamiento Matemático. Espacios Métricos. Caracterización.

Abstract

The training for mathematics teachers in latin América happens to be permeated by factors that have carried to the prioritization of the didactics over the specific knowlege. One example being the decrease and/or removal of the component subjects of advanced mathematics in the syllabus for the future mathematics educators. This article presents the research findings from a mathematics teacher education program, subject of a curricular reform in which the mathematics componets went from 30% to 18%, removing courses such as mathematical analysis, group theory among others. The goal was to distiguish the processes of the mathematical thinking, using challenging problems related to selected subjects of metric spaces. Through a design based methodology with that goal in mind. Some highlights among the conclutions are the identification of the stages for solving non-routine problems, exploration, conjecture formulation, proving and establishing connections. Bringing a original view to this process, denoting the value of experimentation in the development of mathematical thinking.

Keywords: Mathematical Thinking. Metric Spaces. Characterization.



1 INTRODUCCIÓN

En Colombia se ha venido presentando una disminución de asignaturas del componente matemático en el currículo de los programas de formación de profesores de matemáticas, esto derivado posiblemente de las políticas educativas emanadas del Ministerio de Educación Nacional para los programas de Licenciaturas, un ejemplo de esto se encuentra en la Resolución 02041 del 3 de febrero 2016.

Luego de una revisión curricular de las 34 licenciaturas en matemáticas, la respuesta a esta directriz nacional consistió en el aumento de las asignaturas del componente relacionados a las didácticas y una disminución de los contenidos enfocados al saber disciplinar, denotando un desequilibrio entre el saber y el saber enseñar.

Sumado a lo anterior, analizando el direccionamiento estratégico de los programas de formación de profesores en Colombia, declarados en su misión, es frecuente el uso del objetivo de formación, “formar un licenciado con un equilibrio entre el saber matemático y el saber pedagógico” donde se tratan de articular el componente de enseñanza de las matemáticas y el conocimiento matemático.

Evidenciado que el conocimiento específico matemático se encuentra estático y en algunos programas han disminuido, trasladando asignaturas del componente obligatorio al flexible (electivas), como es el caso de los espacios métricos, topología, análisis matemático, estructuras algebraicas, entre otros.

Este es el caso de un programa de licenciatura en matemáticas en Barranquilla, Colombia. El cual debido a diversas circunstancias fue objeto de cambio de su estructura curricular, pasando de 8 a 10 semestres académicos. También aumentando el número de asignaturas de didácticas de las matemáticas llevándolas de 3 hasta 6.

Así como la disminución del componente del saber matemático, mermando el 30% de los créditos académicos, lo que conllevó que materias como topología, análisis matemático, análisis numérico, teoría de grupos, cálculo vectorial no hagan parte del ciclo de formación obligatoria y como estrategia para evitar su desaparición pasaron a ser electivas de profundización.

La situación descrita anteriormente, además de generar un desequilibrio entre el saber matemático y el componente de enseñanza de las matemáticas, también propende por un currículo menos desafiante para los futuros profesores, de igual forma conlleva a impactar negativamente en el proceso de maduración de conceptos necesarios para

fortalecer la praxis en el aula, en palabras de Wasserman (2018) las ideas matemáticas avanzadas discutidas en los cursos son fundamentales para las matemáticas escolares, también es clave para inculcar normas matemáticas más amplias, sensibilidades, abstracciones en los profesores, para desarrollar en los profesores un sentido de lo que implica hacer matemáticas.

En consecuencia, el desarrollo del pensamiento matemático en la formación de profesores se vuelve imprescindible, no solo por las exigencias cognitivas propias de la disciplina, sino también porque este proceso está mediado por componentes afectivos que condicionan la manera en que los futuros profesores se aproximan, comprenden y enseñan la matemática.

2 MARCO TEORICO

2.1 La importancia del desarrollo del pensamiento matemático en la formación de profesores de matemáticas

Existen investigaciones centradas en destacar la importancia del conocimiento matemático del profesor matemáticas, Ball (2008) explora el conocimiento matemático para la enseñanza, definiéndolo “no como el conocimiento matemático utilizado por los profesores para llevar a cabo su trabajo, si no la evaluación del conocimiento matemático necesario para hacerlo”

Posteriormente como una evolución aparece el modelo de conocimientos especializados del profesor de matemáticas, sintetizado por la sigla MTSK (Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge), sobre este modelo, Carrillo et al. (2018, p.7) menciona:

Nuestro punto de partida es la suposición de que para llevar a cabo su función (incluida la planificación de las lecciones, el enlace con los colegas, la impartición de clases y la dedicación de tiempo a la reflexión posterior) el profesor necesita conocimientos específicos. Asociamos esta especificidad con la enseñanza de las matemáticas. Incluye los significados, las propiedades y definiciones de temas particulares, los medios para construir la comprensión del tema, las conexiones entre los elementos de contenido, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y las características asociadas con el aprendizaje de las matemáticas, entre otros. En esta

medida, entendemos que la especificidad de los conocimientos del profesor en relación con la enseñanza de las matemáticas.

Ambas conceptualizaciones se encuentran fundamentadas en el trabajo de Shulman (1986), quien reconoció la presencia de tres tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza:

Conocimiento del contenido (Subject Matter Knowledge, SMT): Este tipo de conocimiento se refiere a lo que el profesor necesita saber sobre los contenidos específicos de la disciplina que enseña, incluyendo el “qué” y el “porqué” de esos contenidos (VERGARA et al., 2014).

Conocimiento Didáctico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK): El PCK se refiere a los aspectos de conocimiento relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del contenido específico que se imparte. Incluye la comprensión de cómo organizar, representar y adaptar los temas o problemas del contenido según los intereses y habilidades de los alumnos (Ibid.). Finalmente, el conocimiento curricular (Curricular Knowledge): Este conocimiento se refleja en los programas, materiales y planificaciones que utilizan los profesores (ESCUDERO-ÁVILA, 2020).

Siguiendo con este razonamiento, la teoría de la Dualidad, Necesidad y Razonamiento Repetido (DNR), propuesta por Harel (2009), considera este conocimiento esencial para una enseñanza efectiva de las matemáticas. De acuerdo con Aguilar et al. (2013), el profesor debe poseer un conocimiento sólido en tres subdominios, Conocimiento de los temas matemáticos, lo que implica comprender los contenidos específicos de la disciplina que enseña; estructura matemática, referida a la capacidad de contextualizar un tema en un constructo más amplio y la práctica matemática, que se resume en saber cómo se trabaja en matemáticas.

Otra teoría en la cual el papel del conocimiento en matemáticas del educador matemático toma especial importancia es la teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE), propuesta por Dubinsky (1991). Al respecto, Sánchez-García (2022) menciona que en ella se pueden identificar dos dominios, el primero referente al conocimiento matemático que el profesor debe poseer, el cual debe ser sólido para enseñar de manera efectiva. Esto incluye comprender los contenidos específicos de la disciplina que enseña, así como la estructura y las prácticas matemáticas. Este papel se destaca en el diseño de actividades ya que el profesor moviliza conocimientos relacionados con teorías de

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, registros de representación y la práctica de demostrar.

Llegando a este punto, emergen diversos constructos relacionados con el conocimiento especializado que debe saber un profesor de matemáticas, propuesto por Shulman (1986). Al analizar los contenidos curriculares, fue posible evidenciar dos tipos de formación; por un lado, se identificaron los contenidos referentes a un conjunto estándar de cursos, los cuales Guacaneme et al. (2017), suelen incluir áreas como Cálculo, Aritmética y Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística.

Por otro lado, se identifican cursos denominados de diversas maneras, entre los que se destacan, matemáticas avanzadas, matemáticas puras, matemáticas formales, de pensamiento matemático avanzado, los cuales están conformados por asignaturas como Estructuras algebraicas, Teoría de grupos, Topología, Espacios métricos, Teoría de la medida, Análisis numérico, Análisis matemático, Geometría diferencial, entre otros.

En consecuencia, en los años recientes, el tema ha sido trabajado por investigadores como Zazkis y Marmur (2018) quienes sugiere que la comprensión de los maestros sobre el conocimiento matemático profundo a las que él denomina matemáticas avanzadas debe relacionarse no solo con el contenido de las matemáticas escolares, sino también a la enseñanza de estas. En este sentido, los autores mencionados ilustran cómo el conocimiento matemático avanzado puede beneficiar decisiones pedagógicas de los docentes ante situaciones de contingencia en las que preguntas, comentarios o enfoques inesperados de los estudiantes surgen en el aula.

2.2 Los procesos de resolución de problemas desafiantes como marco para la caracterización del pensamiento matemático

La resolución de problemas puede ser considerada como una teoría en el campo de la educación matemática y también una metodología de enseñanza, en este epígrafe se condensan los principales autores que sobre esta han hecho importantes avances con especial énfasis con las formas en las cuales se puede caracterizar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Haciendo una revisión documental sobre el tema central de esta sección, es posible constatar como John Dewey (1933), fue el primero en proponer una estrategia para abordar la solución a un problema. Luego en 1945 George Polya, consigue una mayor

difusión de su método de cuatro pasos, el cual se ha operacionalizado llegando a constituirse en una práctica algorítmica.

Al respecto, Krulik y Rudnick (1987), analizan la situación descrita anteriormente, definiendo lo que para ellos es la resolución de problemas como “los medios por los cuales un individuo utiliza el conocimiento, las habilidades y la comprensión previamente adquiridos para satisfacer las demandas de una situación desconocida. El alumno debe sintetizar lo aprendido y aplicarlo a una situación nueva y diferente” (KRULIK; RUDNICK, 1987, p. 4).

Uno de los principales planteamientos que hacen los autores es entender que la resolución de problemas no es un algoritmo; en ese sentido argumentan que “la existencia de un problema implica que el individuo se enfrenta a algo que no reconoce, y a lo que no puede limitarse a aplicar un modelo. Un problema ya no se considerará un problema una vez que pueda ser fácilmente resuelto por algoritmos que hayan sido previamente aprendidos” (KRULIK; RUDNICK, 1987, p. 3). Con base en lo descrito anteriormente, se puede asumir que enseñar matemáticas consiste en promover el tránsito de conocimientos que conlleven a la resolución de problemas.

Desde esta perspectiva, los procesos de resolución de problemas desafiantes constituyen un marco privilegiado para caracterizar el pensamiento matemático, en la medida en que exigen a los estudiantes interpretar o modelar las situaciones, construir significados y formas de razonamiento más allá de la aplicación mecánica de reglas.

En complemento a los enfoques anteriores, diversos autores han propuesto estrategias para la implementación de la resolución de problemas, entre los que se destacan Burton, Mason y Stacey, Schoenfeld y Falk de Losada. A continuación, se sintetizan los aspectos fundamentales de estas propuestas en la Tabla 1, en la cual se presenta una síntesis comparativa de algunos de los principales referentes sobre resolución de problemas, elaborada a partir de los aportes de Dewey (1933), Polya (1988), Krulik y Rudnick (1980), Burton, Mason y Stacey (1982), Schoenfeld (1985) y Falk de Losada (1994).

Tabla 1. Principales referentes sobre resolución de problemas.

John Dewey	George Polya	Stephen Krulik y Jesse Rudnick	Leone Burton, John Mason y Key Stacey	Alan Shoenfeld	Mary Falk de Losada
Enfrentar el problema.	Entender el problema.	Leer.	Abordaje.	interpretación del problema.	Especializar.

Diagnosticar o definir el problema.	Elaboración de un plan.	Explorar.	Ataque.	Representación gráfica.	Conjeturar.
Inventario de varias soluciones.	Llevar a cabo el plan.	Seleccione una estrategia.	Revisión.	Búsqueda de estrategias.	Generalizar.
Conjeturas Consecuencias de las soluciones	Revisar.	Resolver.		Ejecución.	Convencer.
Consecuencias de la prueba.		Revisar y ampliar.		Valorar la solución.	

Fuente: Elaboración propia (2025)

Como se observa en la Tabla 1, los distintos modelos coinciden en etapas fundamentales del proceso de resolución de problemas especialmente en la comprensión de la situación, formulación de estrategias y revisión de los resultados, lo que resalta el papel del pensamiento estratégico y la proposición de conjeturas en la actividad matemática.

2.3 Los espacios métricos

Un espacio métrico es un par (X, d) , donde X es un conjunto cualquiera no vacío y $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación, llamada distancia o métrica, tal que, para cualesquiera $x, y, z \in X$, satisface las siguientes condiciones:

$$d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Los elementos de un espacio métrico, pueden ser número, vectores, puntos, matrices, funciones, entre otros. A continuación, se muestran algunos ejemplos de espacios métricos:

La métrica discreta, también llamada “cero-uno”, de acuerdo con Lima (1976) cualquier conjunto X puede volverse un espacio métrico de una manera sencilla, definiendo $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x, x) = 0$.

La métrica usual, se fundamenta en la distancia entre dos puntos en la recta real, y se define como para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Los espacios métricos tienen diversas aplicaciones en el campo de las ciencias y la tecnología, en especial cuando se trata de establecer distancias entre objetos, ejemplo de esto es la métrica de Hamming.

Así mismo, en la informática es posible encontrar el uso de las métricas, donde se definen como “un valor numérico que permite cuantificar la calidad de las predicciones de un modelo. Su papel es esencial durante todas las etapas del desarrollo de un modelo de Machine Learning, ya que permite determinar si un modelo cumple con nuestras expectativas. En función de los resultados obtenidos, las métricas permiten comparar objetivamente varios modelos entre sí, elegir el modelo más efectivo o cambiar los hiperparámetros de un modelo en esta área, se trabajan especialmente dos las métricas de regresión y las métricas de clasificación.

3 METODOLOGÍA

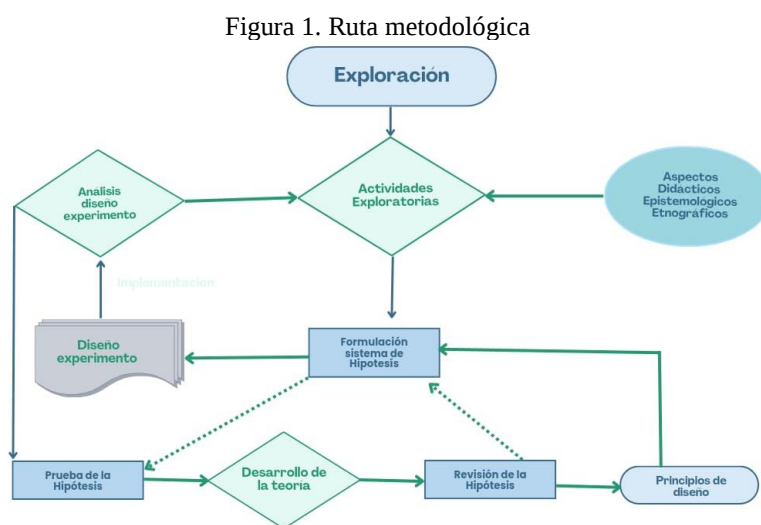
El diseño de la investigación se fundamentó en la investigación basada en el diseño, implementada durante dos semestres consecutivos. En este proceso se diseñaron tres experimentos de aula que tuvieron como eje central problemas desafiantes en el contexto de los espacios métricos. En este marco metodológico, los actores transitaron por ciclos iterativos, en los cuales las soluciones iniciales fueron ajustándose con base en la realimentación de los participantes, tal como lo plantean Barab y Squire (2004).

En ese sentido la investigación contó con las siguientes etapas metodológicas:

1. Identificación del problema y definición del marco teórico, que incluye el planteamiento del problema, la revisión de literatura y el diseño de los objetivos de la investigación.
2. Exploración, la cual se hace a partir de actividades que buscan poner en evidencia características del pensamiento matemático de los estudiantes pertenecientes a la muestra.
3. Diseño inicial de la investigación, en la cual se planifica la intervención preliminar, donde se busca identificar las habilidades del pensamiento matemático de los profesores de matemática en formación.
4. Implementación y análisis de la actividad preliminar.
5. Formulación de la hipótesis, en esta etapa se toman como insumos los resultados obtenidos de la etapa 4 y se suman las descripciones didácticas, epistemológicas y etnográficas de la muestra.
6. Diseño del experimento, consistente en el sistema de actividades fundamentados en la teoría de espacios métricos.

7. Análisis del diseño del experimento, donde los datos recolectados son estudiados a profundidad y se lleva a cabo el primer refinamiento de la intervención.
8. Prueba de la hipótesis, en esta etapa se contrastan los resultados con la hipótesis de trabajo. Con el propósito de establecer los diferentes principios de diseño que busca la IBD.
9. Revisión de la hipótesis, donde se trata de refinar los resultados y alienar con los elementos teóricos perseguidos.
10. Redacción del informe de investigación.

Por otro lado, como elemento diferenciador se tomaron en consideración los aportes de Cai (2023) en lo referente a la ruta metodológica para la investigación científica, la cual define como "formular, probar y revisar hipótesis" (CAI, 2023, p. 5). Luego de hacer una descripción de la muestra, desde el contexto, lo didáctico y lo epistemológico, se procede a comprobar la validez de la hipótesis, para lo cual se desarrolla el ciclo de la investigación basada en diseño (Prediger, 2024) sintetizado en la Figura 1.



Fuente: Elaboración propia (2025)

La población objeto de estudio estaba conformada por 90 estudiantes, de los cuales 25 hicieron parte de la muestra seleccionados mediante un muestreo aleatorio simple, con los cuales se desarrollaron las tres experiencias de aula, bajo la hipótesis: el estudio de temas seleccionados de espacios métricos mediante la resolución de problemas desafiantes mejora las habilidades del pensamiento matemático de los Licenciados en Matemáticas en formación.

Lo anterior bajo una perspectiva cualitativa. Basado en los aportes de Creswell y Poth (2018) se llevaron a cabo análisis de tipo cualitativo, para lograr identificar las habilidades de los estudiantes, en lo referente a la resolución de problemas desafiantes relacionados con los espacios métricos.

Como técnicas de recolección de información se emplearon la observación directa, mediante la cual se registró el desarrollo de las actividades en un cuaderno etnográfico; las entrevistas semiestructuradas, realizadas a referentes de la educación matemática y especialistas en la temática; y las pruebas iniciales, aplicadas con el propósito de identificar el nivel de desarrollo de los estudiantes como parte de la metodología de investigación basada en el diseño (IBD).

En correspondencia con estas técnicas, como instrumentos de investigación se emplearon guías de observación, las cuales permitieron precisar los procesos sobre los que se debía realizar un seguimiento detallado durante la implementación de las actividades; guiones para entrevistas semiestructuradas, que facilitaron la definición de los aspectos centrales a partir de los cuales se diseñaron las preguntas orientadoras dirigidas a especialistas y expertos; y grabaciones de audio y video, cuyos registros audiovisuales posibilitaron la identificación de categorías axiales y emergentes en el proceso de análisis de los resultados.

Para el análisis de los datos de aula se tomaron los procesos de codificación abierta, codificación axial y la codificación selectiva.

1. Codificación abierta: en este proceso se hizo un análisis línea por línea de todos los datos obtenidos de la implementación del sistema de actividades, como transcripciones de las entrevistas, vídeos de las sesiones, muestras de trabajos escritos, entre otros. El objetivo fue el de descomponer los datos en incidentes o ideas discretas y asignar códigos iniciales.
2. Codificación axial: luego de generar los códigos iniciales, se procedió a la agrupación de los códigos en categorías más amplias y se analiza la relación entre ellas. Esto permitió identificar fenómenos centrales, condiciones causales, acciones/interacciones, condiciones intervinientes y consecuencias.
3. Codificación selectiva: este proceso final consistió en la categoría central que unifica todas las otras categorías y explica el fenómeno central de la investigación.

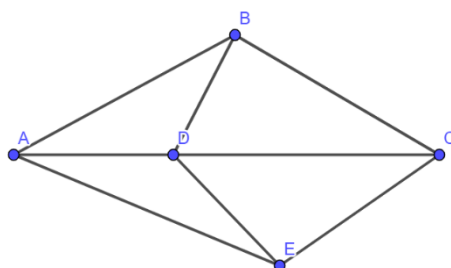
4 RESULTADOS

A continuación, se presentan los análisis de tres experimentos de enseñanza diseñados para los fines descritos en secciones precedentes. Las soluciones son analizadas tomando en cuenta las soluciones escritas de los estudiantes donde se identifican las categorías abiertas sintetizadas en una matriz. Posteriormente, se consolidan la categorización axial hasta derivar en la categoría selectiva que describe el proceso de manera más precisa acorde con la concreción de la teoría local.

En lo referente al primer experimento, se planteó un experimento de enseñanza orientado a explorar como los estudiantes construyen y articulan los diferentes significados matemáticos, como base un problema sobre distancias.

Hay cinco ciudades conectadas por carreteras, como se muestra en el diagrama.

Figura 2. Esquema primer experimento de enseñanza.

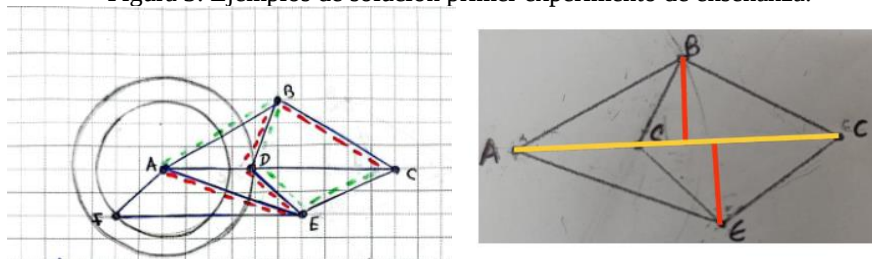


Fuente: Olimpiadas Colombianas de Matemáticas.

¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A hasta la ciudad C visitando solo una vez las ciudades, B, D, E? ¿Cuál es la menor distancia recorrida?

En este problema los estudiantes tomaron como base sus conocimientos sobre geometría para tratar de encontrar una solución que a su modo de ver tuviera un argumento matemático válido.

Figura 3. Ejemplos de solución primer experimento de enseñanza.



Fuente: Estudiantes unidad de análisis.

El objetivo del experimento se enfocó en explorar las formas en las cuales se puede determinar diferencias entre segmentos de recta donde no se expresan los tamaños de forma explícita. Entre los resultados destacables se tiene que los participantes logran establecer dos tipos de estrategias, la primera referida al uso de circunferencias concéntricas las cuales, al notarse gráficamente una diferencia entre las áreas infieren que los radios son de diferente tamaño como se presenta en la figura 3.

En lo referente a la segunda estrategia se centra en el uso de rectas paralelas y a partir de allí conformar dos triángulos sobre los cuales es posible establecer mediante geometría euclidiana cuál de los segmentos, en este caso las hipotenusas eran mayor, como se presenta en la figura 3.

Tabla 2. Codificación abierta primer experimento de enseñanza.

Código	Descripción
Cercanía/vecindad	Para establecer que tan distante o lejano se encuentran dos puntos, los estudiantes recurren a elementos visuales. Usando para tal fin elementos como reglas y compases
Aspectos geométricos	Varios grupos de estudiantes establecen diversas formas de establecer cercanías empleando métodos geométricos, entre los cuales se destacan circunferencias, rectas perpendiculares, ángulos y bisectrices.
Distancias	En las soluciones escritas, los análisis de los vídeos y entrevistas, no se logra establecer una generalización del concepto de distancias separadas de la visualización.
Certeza/comprobación	Los métodos para establecer la validez de los argumentos se basan en la visualización y los temas estudiados en el curso de geometría euclidiana.

Fuente: Elaboración propia (2025)

La codificación permite evidenciar ciertos aspectos, el primero la noción de distancia asociada a la visualización, la segunda el razonamiento a partir de los postulados de la geometría euclidiana. Finalmente, la tercera corresponde a relación que se establece entre el área y la longitud.

Para el segundo experimento se planteó un problema basado en un algoritmo de recurrencia para la conformación de una lista de números. Un compañero ha inventado una nueva manera de alargar una lista de números. Esta consiste por ejemplo una lista como [1, 8], él crea dos listas [2, 9] y [3, 10] donde cada término es uno más que el término correspondiente en la lista previa, y luego une estas tres listas para obtener la lista [1, 8, 2, 9, 3, 10]. Si el compañero del salón comienza la lista con [0] que contiene inicialmente el número cero y aplica el anterior procedimiento repetidamente, él crea la lista:

[0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, ...] (1)

¿Cuál es el término ubicado en la posición 30 de la lista? ¿Cuál está ubicado en la posición 50 de la lista? Si pensamos en calcular la distancia entre la posición 30 y el 50 ¿Cómo lo harías? El resultado que se obtiene difiere si se calcula la distancia de la posición 50 a la posición 30.

Ubicado en la posición 50 de la lista, ¿Si te diriges hacia la derecha en la lista en qué posición aparece un múltiplo de tres? ¿digiriéndote a la izquierda en posición aparece un múltiplo de tres? compara ambos resultados.

El objetivo de este problema fue el de establecer diferencias entre formas de medir las distancias dadas en la recta numérica y en una secuencia. A partir de las estrategias desarrolladas por los estudiantes, las soluciones obtenidas se agruparon en dos conjuntos claramente diferenciados: el primero, basado en la organización de la secuencia en bloques de nueve elementos, y el segundo, orientado a la identificación de una regularidad mediante la generalización de los términos en potencias de 3.

Figura 4. Primera forma de solución segundo experimento de enseñanza.

④ Un compañero ha inventado una nueva manera de alargar una lista de números. Esta consiste por ejemplo una lista como [1,8], él crea dos listas [2,9] y [3,10] donde cada término es uno más que el término correspondiente en la lista previa, y luego une estas tres listas para obtener la lista [1,8,2,9,3,10]. Si el compañero del salón comienza la lista con [0] que contiene inicialmente el número cero y aplica el anterior procedimiento repetidamente, él crea la lista:

[0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, ...]

¿Cuál es el término 30 de la lista?

Respuesta = El término 30 de la lista es el 5.

1. Un compañero ha inventado una nueva manera de alargar una lista de números. Esta consiste por ejemplo una lista como [1,8], él crea dos listas [2,9] y [3,10] donde cada término es uno más que el término correspondiente en la lista previa, y luego une estas tres listas para obtener la lista [1,8,2,9,3,10]. Si el compañero del salón comienza la lista con [0] que contiene inicialmente el número cero y aplica el anterior procedimiento repetidamente, él crea la lista:

[0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, ...]

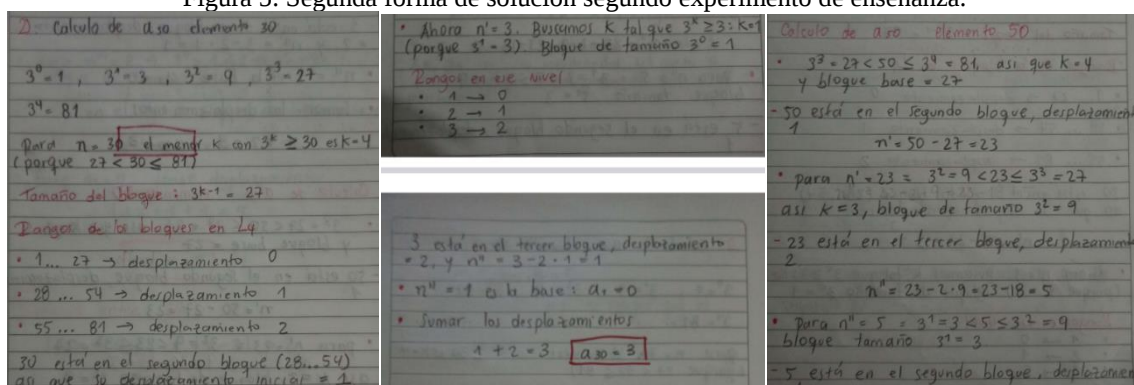
¿Cuál es el término 30 de la lista?

Los agrupo de a 9 y luego los sume 1 a cada número lo realice 4 veces hasta encontrar el 30 término.

Fuente: Estudiantes unidad de análisis

La figura 4 presenta la primera forma de solución que los estudiantes propusieron para el experimento de enseñanza, como se puede notar la intención de ellos fue la de organizar en bloques y vectores filas para poder establecer cuál es el elemento 30 y elemento 50. Ambos llegan a respuestas válidas.

Figura 5. Segunda forma de solución segundo experimento de enseñanza.



Fuente: Estudiantes unidad de análisis

La figura 5 presenta la segunda forma de solución dada al problema planteado, usan elementos de teoría de números y estableciendo una estructura de secuencias, en su forma de resolución se plantea como moverse entre posiciones dentando una estructura de formalización algorítmica cercana al pensamiento computacional, los estudiantes que propusieron este abordaje llegaron a respuestas diferentes, en especial para la posición 30 de la lista. Sumado a lo anterior, no comprobó si la respuesta era válida en contraste con la otra forma de solución, donde mediante cálculos y siguiendo la forma recursiva de construcción logran establecer la certeza de su respuesta.

Tabla 3. Codificación abierta segundo experimento de enseñanza.

Codificación axial	Descripción
Fenómenos centrales	Generalización del concepto de distancia.
Condiciones causales	Exposición de argumentos basados en cálculos y comparaciones entre métodos.
Acciones/interacciones	Los estudiantes exploran soluciones en las cuales han disminuido el uso de elementos concretos. Discuten entre ellos las posibles soluciones y tratan de establecer cual es a su modo de ver la más rigurosa y que cumple con lo solicitado en el problema.
Condiciones intervinientes	Uso de las tecnologías como GeoGebra.
Consecuencias	Es posible evidenciar una comprensión parcial de la eficacia de algunos métodos demostrativos sobre otros.

Fuente: Elaboración propia (2025)

Luego de la exploración de las nociones que los estudiantes tenían sobre el concepto de distancia se procedió a la intervención, explicando lo correspondiente a los aspectos formales sobre los espacios métricos y los axiomas que permiten determinar si cierta función de distancia realmente cumple con ellos.

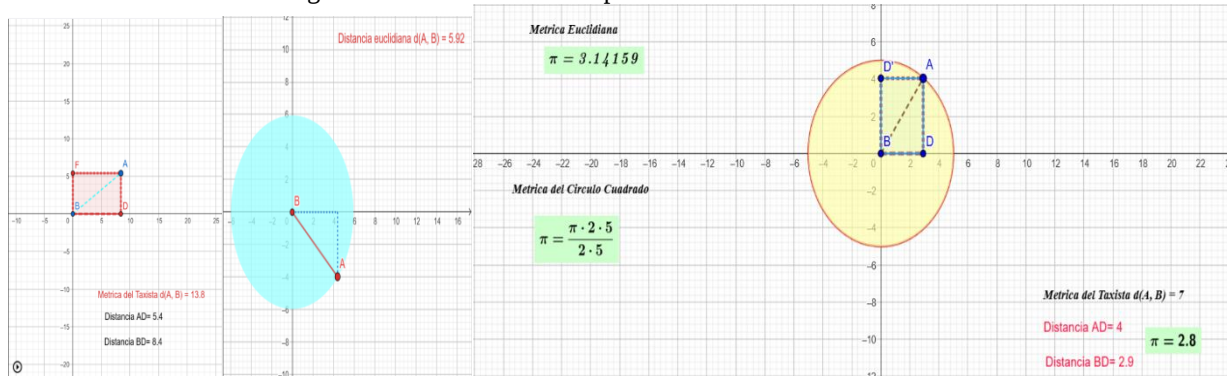
Para la última actividad se recurrió a la implementación del software de geometría dinámica, en este caso GeoGebra. Con el objetivo de visualizar las formas que toman las

circunferencias a medida que cambian las métricas en especial aquellas que se derivan de la métrica L_p , definida como:

$$d(x, y) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{con } p \in \mathbb{R} \quad (2)$$

En este experimento de enseñanza se dieron resultados más allá de los esperados, en especial con el planteamiento de problemas donde se busca establecer la relación entre el valor de p y el valor de π en la circunferencia formada por una determinada métrica. En especial, valores enteros de π y no el conocido irracional en el caso de las circunferencias redondas.

Figura 6. Soluciones tercer experimento de enseñanza.



Fuente: Estudiantes unidad de análisis usando GeoGebra.

La figura 6 presenta dos de las propuestas mediante las cuales los estudiantes logran establecer la relación entre los valores de p y las formas de las circunferencias que se forman en el plano cartesiano.

Al respecto, los estudiantes extienden el concepto de circunferencia más de las formas redondas a partir de la definición, encontrando forma de rombo cuando $p=1$, en ese contexto la métrica es conocida como la de Manhattan o la del taxista. Redonda cuando $p=2$, llamada métrica euclídea y cuando p se hace muy grande llamada del máximo o del ajedrez.

Sumado a lo anterior, los estudiantes comienzan a explorar otro tipo de relaciones, en especial los valores de π , para las métricas de Manhattan y del ajedrez calculan valores enteros, esto es 2, 4, 5 entre otros. Luego de esto inicia un proceso un poco más elaborado para poder encontrar relaciones entre el valor de p y el valor de π .

En ese sentido, se encuentra una relación basada en las potencias de 2, de manera explícita formulada como 2^{1+B} , donde B es el diámetro de la circunferencia dada.

Tabla 4. Codificación abierta tercer experimento de enseñanza.

Código	Descripción
C	Los estudiantes logran establecer las propiedades de las métricas y la pertinencia de usar una de acuerdo con el problema formulado.
AG	En este momento de implementación de las actividades, los participantes de la investigación logran identificar el espacio métrico con su representación gráfica.
D	En las soluciones escritas, los análisis de los vídeos y entrevistas se logra establecer una generalización del concepto de distancias separadas de la visualización.
C/C	Los métodos para establecer la validez de los argumentos se basan en comprobaciones, demostraciones y en menor medida en la visualización.

Fuente: elaboración propia (2025)

En este experimento de enseñanza, los estudiantes denotaron una mayor capacidad de análisis y el resultado de este proceso se evidencia en como lograron establecer relaciones entre diferentes parámetros y su variación, en este aspecto se destaca en rol que la visualización tiene en la exploración con el apoyo de las herramientas tecnológicas como los softwares de geometría dinámica. La relación p vs π , se destaca como uno de los principales hallazgos de esta actividad, que inicialmente pretendía extender la conceptualización de circunferencia.

5 CONCLUSIÓN

La principal conclusión está relacionada con la identificación de una categoría central que permite abordar de manera explícita las relaciones entre cada uno de los aspectos identificados en las soluciones y las soluciones descritas en las categorías abiertas.

Así las cosas, una codificación selectiva se sintetiza en la Comprensión geométrica intuitiva para la generalización del concepto de distancia. Explica la incidencia del conocimiento que los estudiantes poseen sobre la geometría euclidiana (condición) en los intentos de generalizar el concepto de distancia (acciones). Lo que puede llevar a un proceso exitoso o a ideas erróneas persistentes (consecuencias).

Sumado a lo anterior, los procesos identificados para la resolución de problemas por parte de los estudiantes se centran en cuatro momentos, el primero la exploración del problema, constituyéndose en una etapa importante que permite entender el problema y

las posibles conjeturas resultantes de las diversas pruebas que los discentes llevan a cabo para resolverlo.

En consecuencia, fue posible identificar un segundo proceso, el de formulación de conjeturas identificadas en la exploración. En ese orden de ideas, Las conjeturas motivan las demostraciones, los intentos de demostración refinan las conjeturas, la comprensión de una demostración establece conexiones y las conexiones inversas generan nuevas preguntas.

El transito desde la exploración hacia la formulación de conjeturas representa un momento crítico de en desarrollo del pensamiento matemático. Al respecto, Mason, Burton y Stacey (1985) llaman a este proceso la columna vertebral de la resolución de problemas. En los análisis de los resultados, es posible evidenciar que esta se encuentra mediada por la necesidad intelectual de certeza. La misma impulsa al estudiante a buscar los argumentos que justifiquen la verdad de sus afirmaciones matemáticas.

En el contexto de los espacios métricos, esta necesidad se manifestó en el momento que los estudiantes buscaban determinar si una forma particular de medir distancias era una métrica, mediante la verificación de los axiomas que las definen. En los debates suscitados en las sesiones de socialización permitieron evidenciar como la necesidad de certeza movilizó a los estudiantes a elaborar argumentos cada vez más rigurosos para convencer a sus compañeros sobre lo valido de su conjetura.

La demostración, entendida en un sentido amplio que incluye las pruebas formales como las justificaciones argumentativas, constituye el proceso mediante el cual las conjeturas son validadas o refutadas. De acuerdo, con los análisis de los resultados permitieron vincular a la demostración con las necesidades de certeza y de cómputo, así mismo, las implementaciones dieron cuenta de una evolución significativa en los métodos de demostración empleados por los estudiantes.

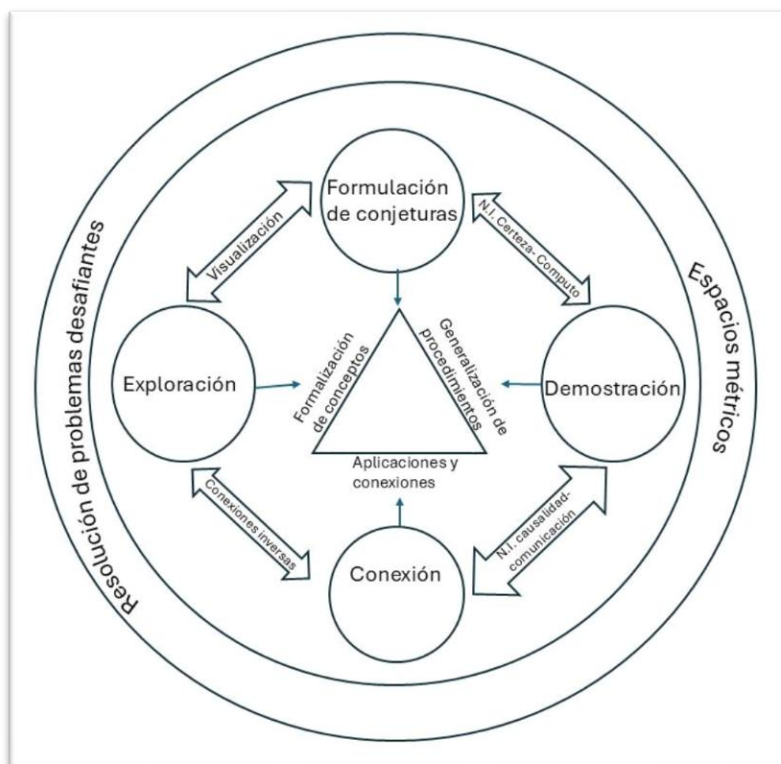
En las etapas iniciales, predominaron las comprobaciones empíricas basadas en casos particulares, donde los estudiantes verificaban sus conjeturas para valores específicos sin lograr establecer argumentos de carácter general. Conforme avanzaron las implementaciones, comenzaron a emerger formas de argumentación más sofisticadas que incorporaron propiedades abstractas de las métricas.

El proceso de conexión representa la fase en la cual los aprendizajes adquiridos durante la resolución de un problema específico se vinculan con otros conocimientos matemáticos y aplicaciones diversas. Los análisis de los resultados permitieron develar

que las conexiones se encuentran mediadas por las necesidades de causalidad y comunicación.

Ahora bien, tomando en cuenta los análisis de los datos recolectados y la identificación de relaciones entre las aciertos y dificultades relatadas es posible sintetizarla en la Figura 7.

Figura 7. Marco de caracterización del pensamiento matemático.



Fuente: Elaboración propia (2025)

En la figura 7, se sintetiza los hallazgos de la investigación con los estudiantes que conforman la unidad de análisis. Es relevante destacar la manera en la cual la visualización tiene un rol preponderante en un inicio, no como un fin si no como un medio para poder llegar a la formulación de conjeturas.

Así mismo, se revela una tensión desequilibrante entre la intuición geométrica (euclidiana) y la necesidad de abstracción axiomática de los espacios métricos. Se identificó que el éxito de los estudiantes depende de un cambio conceptual: desvincularse de la noción de distancia física para aceptar métricas abstractas (como la métrica discreta o la métrica del taxista).

La investigación coloca en evidencia una tensión crítica en la formación de profesores en Sudamérica: la contraposición entre las políticas que priorizan las didácticas generales frente a la tendencia internacional que valora el pensamiento matemático avanzado.

Por otro lado, se hace relevante estudiar el impacto de la reducción de contenidos matemáticos como teoría de números, análisis matemático entre otras en la formación de los futuros profesores de matemáticas y en su proyección como docentes de matemáticas.

REFERENCIAS

- AGUILAR, A.; CARREÑO, E.; CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.; ESCUDERO, D.; FLORES, E.; FLORES, P.; MONTES, M.; ROJAS, N. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (CIBEM), 7., 2013. Montevideo, 2013.
- ÁVILA-TOSCANO, J. H.; ROJAS-SANDOVAL, Y.; TOVAR-ORTEGA, T. Perfil del dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas. *Revista de Psicología y Educación*, v. 15, n. 2, p. 225–236, 2020. DOI: 10.23923/rpye2020.02.197.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008. DOI: 10.1177/0022487108324554.
- BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-based research: putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences*, v. 13, n. 1, p. 1–14, 2004. DOI: 10.1207/s15327809jls1301_1.
- CARRILLO-YÁÑEZ, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2018. DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981.
- CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.; MUÑOZ-CATALÁN, M. Mathematics teachers' specialised knowledge (MTSK): Research and practice. Cham: Springer, 2018.
- CRESWELL, J. W.; POTH, C. N. Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches. 4. ed. Thousand Oaks: SAGE, 2018.
- DE LOSADA, M. F. Knowledge and expertise in mathematics education: Issues in teachers' preparation and development. In: PROCEEDINGS OF THE 18TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. Lisboa, 1994.

DEWEY, J. *Cómo pensamos: un tratado sobre la naturaleza y el desarrollo del pensamiento*. Barcelona: Paidós, 2007. (Obra original publicada en 1910/1933).

ESCUADERO-ÁVILA, D. I.; CARRILLO-YÁÑEZ, J. El conocimiento didáctico del contenido: bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, v. 32, n. 2, p. 8–38, 2020. DOI: 10.24844/em3202.0.

GUACANEME-SUÁREZ, E. A.; OBANDO-ZAPATA, G.; GARZÓN, D.; VILLA-OCHOA, J. A. Colombia: Mathematics education and the preparation of teachers. In: *Mathematics teacher preparation in Central America and the Caribbean*. Cham: Springer, 2017. p. 19–37.

HAREL, G. What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In: LIN, F. et al. (Org.). *The philosophy of mathematics education*. New York: Springer, 2009. p. 127–144. DOI: 10.1007/978-1-4419-0147-8_11.

HIEBERT, J.; CAI, J.; HWANG, S.; MORRIS, A. K.; HOHENSEE, C. *Doing research: a new researcher's guide*. Cham: Springer Nature, 2023.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. *Problem solving: a handbook for teachers*. 2. ed. Boston: Allyn and Bacon, 1987.

LIMA, E. L. *Espaços métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Resolución No. 02041 de 2016. Bogotá: MEN, 2016.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. *Thinking mathematically*. London: Prentice Hall, 1982.

PÓLYA, G. *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press, 1945.

PREDIGER, S. Conjecturing is not all: Theorizing in design research by refining and connecting categorial, descriptive, and explanatory theory elements. *EDeR – Educational Design Research*, v. 8, n. 1, p. 1–30, 2024.

SÁNCHEZ GARCÍA, J. ¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado? 2022. Tesis (Doctorado) — Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Disponible en: <https://hdl.handle.net/20.500.12371/16421>

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press, 1985.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986. DOI: 10.3102/0013189X015002004.

TETTAY-MEJÍA, S.; PULGAR-GARCÍA, M.; ROJAS-SANDOVAL, Y. Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis*, v. 15, n. 2, p. 193–205, 2019. DOI: 10.21676/23897856.3249.

VERGARA DÍAZ, C.; COFRÉ MARDONES, H. Conocimiento pedagógico del contenido: ¿El paradigma perdido en la formación inicial y continua de profesores en Chile? *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, v. 40, número especial, p. 323–338, 2014. DOI: 10.4067/S0718-07052014000200019.

WASSERMAN, N. H. Exploring advanced mathematics courses and content for secondary mathematics teachers. In: WASSERMAN, N. H. (Org.). *Connecting abstract algebra to secondary mathematics for secondary mathematics teachers*. Cham: Springer, 2018. p. 1–20. DOI: 10.1007/978-3-319-99214-3_1.

ZAZKIS, R.; MARMUR, O. Groups to the rescue: responding to situations of contingency. In: WASSERMAN, N. H. (Org.). *Connecting abstract algebra to secondary mathematics for secondary mathematics teachers*. Cham: Springer, 2018. p. 363–381.

Contribución de los autores

Todos los autores contribuyeron por igual al desarrollo de este artículo.

Disponibilidad de datos

Todos los conjuntos de datos relevantes para los resultados de este estudio están disponibles en su totalidad en el artículo.

Cómo citar este artículo (APA)

Solorzano-Movilla, J. G., Guerrero, G. A. C., & Rojas-Sandoval, Y. P. (2026). CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO MEDIANTE LOS ESPACIOS METRICOS. *Veredas Do Direito*, 23(4), e234704. <https://doi.org/10.18623/rvd.v23.n4.4704>